$x=u^{\log_u x}$ の微積分の計算への活用

$x=u^{\log_u x}$ を関数の定義から導いてみる

対数関数と指数関数は互いに逆関数の関係にある

したがって，$f(x)=\log_u x$ の逆関数は，$f^{-1}(x)=u^x$ である。

関数とその逆関数の合成関数

$x \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} f(x)$ より，$f^{-1}\circ f(x)=x$ あるいは，$f^{-1}(f(x))=x$

矢印の向きを逆にすると，

$x \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\leftrightarrows}} f^{-1}(x)$ より，$f\circ f^{-1}(x)=x$ あるいは，$f\left(f^{-1}(x)\right)=x$

よって，

$x=f^{-1}\circ f(x)=f\circ f^{-1}(x)$ （あるいは，$f^{-1}(f(x))=f\left(f^{-1}(x)\right)$）

$x=u^{\log_u x}$ について

$f(x)=\log_u x$ とその逆関数 $f^{-1}(x)=u^x$ について，

$x=f^{-1}\circ f(x)$ より，$x=u^{f(x)}=u^{\log_u x}$

よって，$x=u^{\log_u x}$

補足 1：楽な導き方

$x=u^t$ おき，底を u とする対数をとると，$\log_u x=t$ $\therefore x=u^{\log_u x}$

補足 2

$x=f\circ f^{-1}(x)=\log_u f^{-1}(x)=\log_u u^x$ $\therefore x=\log_u u^x$

については，慣れ親しんでいるので違和感なく受け入れられるだろう。

$t=u^{\log_u t}$ において $u=e$ とすると微積分の計算処理が楽になる。

$t=u^{\log_u t}$ において，$u=e$ とすると，$t=e^{\log t}$

微分処理への活用例

$t=a^x$ の場合，

$a^x=e^{\log a^x}$ より，$a^x=e^{x\log a}$

よって，$\left(a^x\right)'=\left(e^{x\log a}\right)'=(x\log a)'e^{x\log a}=\log a\cdot e^{x\log a}=\log a\cdot a^x$

積分処理への活用例

$t=a^x$ の場合，

$a^x=e^{\log a^x}$ より，$a^x=e^{x\log a}$

よって，

$$\int a^x dx=\int e^{x\log a}dx=\frac{1}{(x\log a)'}e^{x\log a}+C=\frac{1}{\log a}a^x+C$$